



In parteneriat <b>M.E.C.T.</b>	<b>TESTUL NATIONAL "EVALUARE ÎN EDUCATIE"</b>	Sub egida <b>ACADEMIEI ROMANE</b>
	<b>MATEMATIKAI TUDÁSFELMÉRŐ VERSENY</b>  CONSTANTIN NASTASESCU professzor koordinálásával, aki a ROMÁN AKADÉMIA levelező tagja	

**2007. november 17.**

**IX. osztály**

Megjegyzés: Minden feladat kötelező. Az I. feladat minden kérdésére egyetlen helyes válasz adható. A II. feladathoz csak válaszokat írd. A III. és IV. feladatok megoldásait írd le részletesen. Hivatalból: 10 pont. Munkaidő 2 óra 30 perc.

**I FELADAT (20p) (A vizsgalapra csak a helyes válasz betűjelét írd le!)**

- (4p) 1) Hány egész szám van a  $(-10,10)$  intervallumban?  
a) 20                      b) 21                      c) 19                      d) 18
- (4p) 2) Számítsd ki:  $[1,5] + [-1,5] + [0,5] + [-0,5]$  . (ahol  $[a]$  az  $a$  valós szám egész része).  
a) 0                      b) 1                      c) -1                      d) -2
- (4p) 3) Számítsd ki:  $\{1,5\} + \{-1,5\} + \{0,5\} + \{-0,5\}$  ? (ahol  $\{a\}$  az  $a$  valós szám törtrésze).  
a) 0                      b) 1                      c) 2                      d) 3
- (4p) 4) Ha  $M$  az  $(AB)$  szakasz felezőpontja, az  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$  vektor egyenlő:  
a)  $\overrightarrow{AB}$                       b)  $\vec{0}$                       c)  $\overrightarrow{BA}$                       d)  $2\overrightarrow{AB}$
- (4p) 5) Ha  $A, B, C$  három pont egy síkban az  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$  vektor egyenlő:  
a)  $\vec{0}$                       b)  $\overrightarrow{AC}$                       c)  $\overrightarrow{CB}$                       d)  $\overrightarrow{BA}$

**II. FELADAT ( 40p)**

**(A vizsgalapra csak a válaszokat írd!)**

- (4p) 1) Melyek az  $x^2 + 3x - 4 = 0$  egyenlet valós megoldásai?
- (4p) 2) Mennyi az  $x^2 + 5x - 6 = 0$  egyenlet valós megoldásainak összege?
- (4p) 3) Mennyi az  $x^2 - 5x + 4 = 0$  egyenlet valós megoldásainak szorzata?
- (4p) 4) Írd fel egy olyan egész együtthatós másodfokú egyenletet, amelynek mindkét megoldása irracionális szám.
- (4p) 5) Mennyi a  $\sqrt{3}$  szám első két tizedesjegyének összege?
- (4p) 6) Ha  $\frac{1}{21} = 0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ , határozd meg  $a_{2007}$  értékét.
- (4p) 7) Mennyi a  $\sqrt{101}$  szám első 10 tizedesjegyének szorzata?
- (4p) 8) Ha  $G$  az  $ABC$  háromszög súlypontja, mennyi a  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$  vektorösszeg?
- (4p) 9) Ha  $O$  az  $ABC$  háromszög köré írt kör középpontja, mennyi az  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$  vektorösszeg?
- (4p) 10) Ha  $D$  az  $ABC$  háromszög  $BC$  oldalának felezőpontja, mennyi a  $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$  vektorösszeg?

**MATEMATIKAI TUDÁSFELMÉRŐ VERSENY 2007, november 17.**

**IX. osztály**

**III. FELADAT ( 15p )****(Írd le a feladat részletes megoldását!)**

- (4p) a) Igazold, hogy  $\frac{5}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7}$ .
- (4p) b) Igazold, hogy  $2008 = 2 \cdot 2007 - 2006$ .
- (2p) c) Igazold, hogy  $\frac{2007}{2008} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2006}{2008} \right)$ .
- (1p) d) Ha  $m, n \in \mathbf{N}^*$  relatív prímek és  $1 < m < n$ , akkor létezik  $d \in \mathbf{N}^*$  és  $k \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ , úgy, hogy  $n = md - k$ .
- (2p) e) Igazold, hogy az  $n = md - k$  egyenlőség ( $d, n \in \mathbf{N}^*$ ),  $\frac{m}{n} = \frac{1}{d} \left( 1 + \frac{k}{n} \right)$  alakba írható.
- (1p) f) Igazold, hogy ha  $a, b \in \mathbf{N}$ ,  $0 < a < b$ , léteznek az  $r, d_1, d_2, \dots, d_r$  nemnulla természetes számok úgy, hogy  $\frac{a}{b} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_1 \cdot d_2} + \dots + \frac{1}{d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_r}$  legyen.
- (1p) g) Határozd meg az  $n \in \mathbf{N}^*$  és  $r_1 < r_2 < \dots < r_n \in \mathbf{N}^*$  számokat úgy, hogy  $\frac{17}{18} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \dots + \frac{1}{r_n}$  legyen.

**IV. FELADAT ( 15p )****(Írd le a feladat részletes megoldását!)**Legyen  $S$  az  $ABC$  háromszög területe,  $x, y, z \in (0, \infty)$  és  $D \in (BC)$ ,  $E \in (AC)$ ,  $F \in (AB)$ pontok úgy, hogy  $\frac{BD}{DC} = x$ ,  $\frac{CE}{EA} = y$ ,  $\frac{AF}{FB} = z$ .Legyen  $\{M\} = (AD) \cap (BE)$ ,  $\{N\} = (BE) \cap (CF)$ , és  $\{P\} = (AD) \cap (CF)$  úgy, hogy

$$\frac{MA}{MD} = \frac{x+1}{xy}, \quad \frac{NB}{NE} = \frac{y+1}{yz} \quad \text{és} \quad \frac{PC}{PF} = \frac{z+1}{zx}.$$

Egy tetszőleges  $QRT$  háromszög területét jelölje  $S_{QRT}$ .

- (4p) a) Igazold, hogy:  $\frac{S_{ADB}}{S} = \frac{BD}{BC}$ .
- (4p) b) Igazold, hogy:  $\frac{S_{AMB}}{S_{ADB}} = \frac{AM}{AD}$ .
- (2p) c) Igazold, hogy:  $S_{AMB} = \frac{x}{xy + x + 1} S$ .
- (2p) d) Igazold, hogy:  $S_{MNP} = \left[ 1 - \left( \frac{x}{xy + x + 1} + \frac{y}{yz + y + 1} + \frac{z}{zx + z + 1} \right) \right] \cdot S$ .
- (1p) e) Igazold, hogy:  $\frac{x}{xy + x + 1} + \frac{y}{yz + y + 1} + \frac{z}{zx + z + 1} \leq 1, \quad \forall x, y, z \in (0, \infty)$ .
- (1p) f) Igazold, hogy  $\forall s \in \left( 0, \frac{S}{4} \right]$  esetén léteznek az  $X \in (AB)$ ,  $Y \in (BC)$ ,  $Z \in (CA)$  pontok úgy, hogy  $S_{XYZ} = s$  legyen.
- (1p) g) Ha  $xyz = 1$  igazold, hogy:  $S_{DEF} \leq \frac{1}{4} \cdot S$ .

Összeállította: Nicolae Muşuroia, Nagybánya